Instituto de Matemática y Física
Cálculo I - Plan común
WF/CM/JE/WC/SM

Prueba 1

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \frac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) [**30 pts**] Considere las funciones:

$$f(x) = 3 + \log_2(x-1) \quad \text{biyectiva} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{c} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 - 1 \end{array}$$

a) [**7 pts**] Hallar dominio y recorrido de f.

b) [**8 pts**] Determine si g es biyectiva. En caso contrario realice las restricciones necesarias de modo que sí lo sea.

c) [**8 pts**] Hallar una función h tal que $g \circ h = f$ y calcular $h(2)$.

d) [**7 pts**] Graficar g y g^{-1} indicando explícitamente el dominio y recorrido de g^{-1}.

2) **[15 pts]**

a) **[8 pts]** Demuestre la siguiente igualdad $\dfrac{\sin(3\alpha)}{\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)} = 4\cos(\alpha) - \sec(\alpha)$

b) **[7 pts]** Calcule $\dfrac{\sin(225^\circ)\cdot\cos(330^\circ)}{\sin(330^\circ)+\tan(225^\circ)-1}$

3) **[15 pts]** Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos(2x) + 3 = 5\cos(x) \quad \text{para} \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Pauta :

1) *a)*

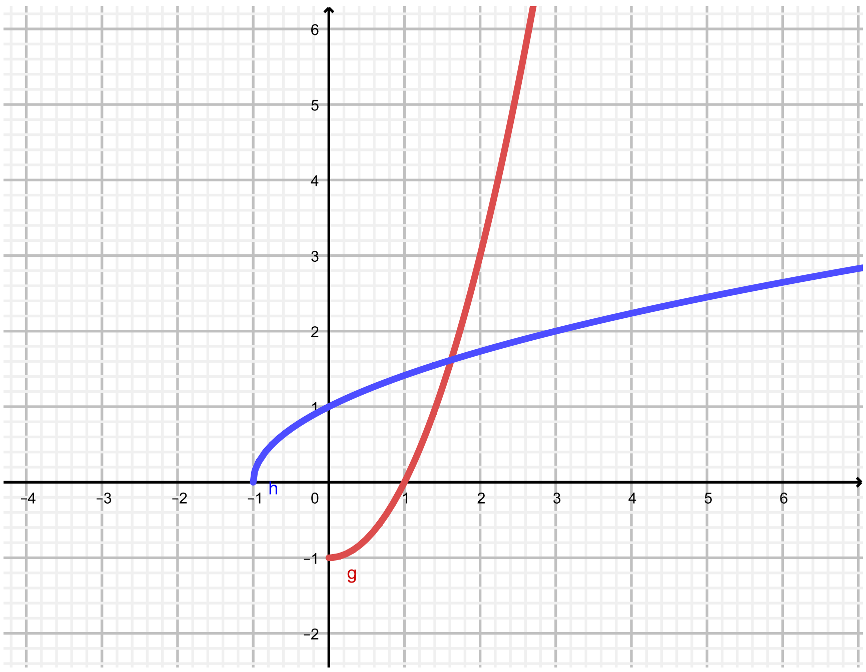
- $Dom(f) = \{x \,:\, x > 1\} =]1, +\infty[$ **3 pts**
- $y = 3 + \log_2(x-1) \iff x = 1 + 2^{y-3}$. Así: $Rec(f) = \mathbb{R}$ **4 pts**

b)

- $g(-1) = 0 = g(1)$. Por tanto g no es inyectiva. **3 pts**
  En efecto: $u^2 - 1 = v^2 - 1 \Rightarrow u = \pm v$, dos preimagénes para una misma imagen.
- El vértice de la parábola está en $(0, -1)$, lo cual indica que
  $$Rec(g) = \{x \,:\, x \geq -1\} = [-1, +\infty[\neq \mathbb{R} = Cod(g)$$
  luego g no es epiyectiva. **3 pts**
- En consecuencia, si consideramos $g : [0, \infty[\to [-1, \infty[$, es biyectiva y su inversa es $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ **2 pts**

c) Como $g \circ h = f \Rightarrow h = g^{-1} \circ f$, entonces $h(2) = g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(3) = \sqrt{4} = 2$ **8 pts**

d) Gráficas **7 pts**



2) *a)*

- $$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(\alpha + 2\alpha)\\ &= \sin(\alpha) cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos(\alpha)\\ &= \sin(\alpha)[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)\\ &= \sin(\alpha)[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) = 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha)\end{aligned}$$
  4 pts
- $\dfrac{\sin(3\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)} = \dfrac{3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha)}{\sin(x)\cos(x)} = 3\cos(x) - \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$ **3 pts**

$$= 3\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)} + \cos(x)$$
$$= 4\cos(x) - \sec(x) \qquad \textbf{1 pto}$$

b)

$$\frac{\sin(225°)\cdot\cos(330°)}{\sin(330°)+\tan(225°)-1} = \frac{\sin(180+45°)\cdot\cos(360°-30°)}{\sin(360°-30°)+\tan(180°+45°)-1} \qquad \textbf{3pts}$$
$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}+1-1} \qquad \textbf{3pts}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{1pto}$$

3) $2\cos^2(x) + 2 = 5\cos(x) \Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$ **5 pts**

Luego, haciendo $u = \cos(x)$, se obtiene la ecuación

$$2u^2 - 5u + 2 = (u-2)(2u-1) = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u & = & 2 \\ u & = & 1/2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \cos(x) & = & 2 \\ \cos(x) & = & 1/2 \end{array}\right.$$

6 pts

- $\cos(x) = 2$, no tiene solución, pues $x \in [-1, 1]$ **2 pts**
- $\cos(x) = 1/2 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ó $x = \dfrac{5}{3}\pi$ **2 pts**